Optimisation continue

Y. Collette

La Programmation Linéaire

Le problème

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiser} & c^t x \\ \text{Avec} & A\,x = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Forme Standard

Outil commercial: CPLEX, XPress
Outil libre: GLPK LPSolve

Résolution:

- La méthode du simplex (Dantzig - 1949)
- Méthode de point intérieur (Karmarkar - 1985)

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiser} & c^t x \\ \text{Avec} & A\,x \geq b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Transformation vers la Forme Standard

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiser} & c^t x \\ \text{Avec} & A\,x - z = b \\ & x, z \geq 0 \end{array}$$

La Programmation Linéaire

Le problème dual

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiser} & c^t x \\ \text{Avec} & A x = b \\ & x \geq 0 \end{array}$$

Problème primal

$$\begin{array}{ll} \text{Minimiser} & y^t b \\ \text{Avec} & y^t A \geq c^t \\ & y \geq 0 \end{array}$$

Problème dual

$$\begin{array}{lccccc} \text{Minimiser} & 3x_1 + 5x_2 & & & & \\ & x_1 & & & \leq & 4 \\ \text{Avec} & & & 2x_2 & \leq & 12 \\ & 3x_1 & + & 2x_2 & \leq & 18 \\ & x_1, x_2 \geq 0 & & & & \end{array}$$

$$\begin{array}{lcccccc} \text{Maximiser} & 4y_1 + 12y_2 + 18y_3 & & & & & \\ & y_1 & & + & 3y_3 & \geq & 3 \\ \text{Avec} & & 2y_2 & + & 2y_3 & \geq & 5 \\ & y_1, y_2, y_3 \geq 0 & & & & & \end{array}$$

Réduction du nombre de contraintes

La Programmation Linéaire

Réduction du nombre de variables

B matrice carrée inversible
P Matrice de permutation
x_B variables de base

$$AP=[B|N]$$

$$P^t x=\begin{bmatrix} x_B \\ x_N \end{bmatrix}$$

$$P\,P^t=I$$

$$b=Ax=AP(P^t x)=B\,x_B+N\,x_N$$

Réécriture de la contrainte Ax = b

$$x_B=B^{-1}b-B^{-1}N\,x_N$$

Relation liant les variables de bases x_B aux variable x_N

$$\underset{x_N}{\text{Miminiser}}\ h(x_N)=f\left(P\left[B^{-1}b-B^{-1}N\,x_N\right]\right)$$

Problème d'optimisation non contraint

La Programmation Linéaire

Réduction du nombre de variables

$$\text{Min} \quad \sin(x_1+x_2)+x_3^2+1/3(x_4+x_5^4 x_6/2)$$

$$\text{Avec} \quad 8x_1-6x_2+x_3+9x_4+4x_5=6$$

$$3x_1+2x_2-x_4+6x_5+4x_6=-4$$

Problème de départ

$$AP=\begin{bmatrix} 1 & 0 & | & 8 & -6 & 9 & 4 \\ 0 & 4 & | & 3 & 2 & -1 & 6 \end{bmatrix}$$

Matrice permutée

$x_3\, x_6\, x_1\, x_2\, x_4\, x_5$

$$\begin{bmatrix} x_3 \\ x_6 \end{bmatrix} = -\begin{bmatrix} 8 & -6 & 9 & 4 \\ 3/4 & 1/2 & -1/4 & 3/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_4 \\ x_5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Relation liant x_B à x_N

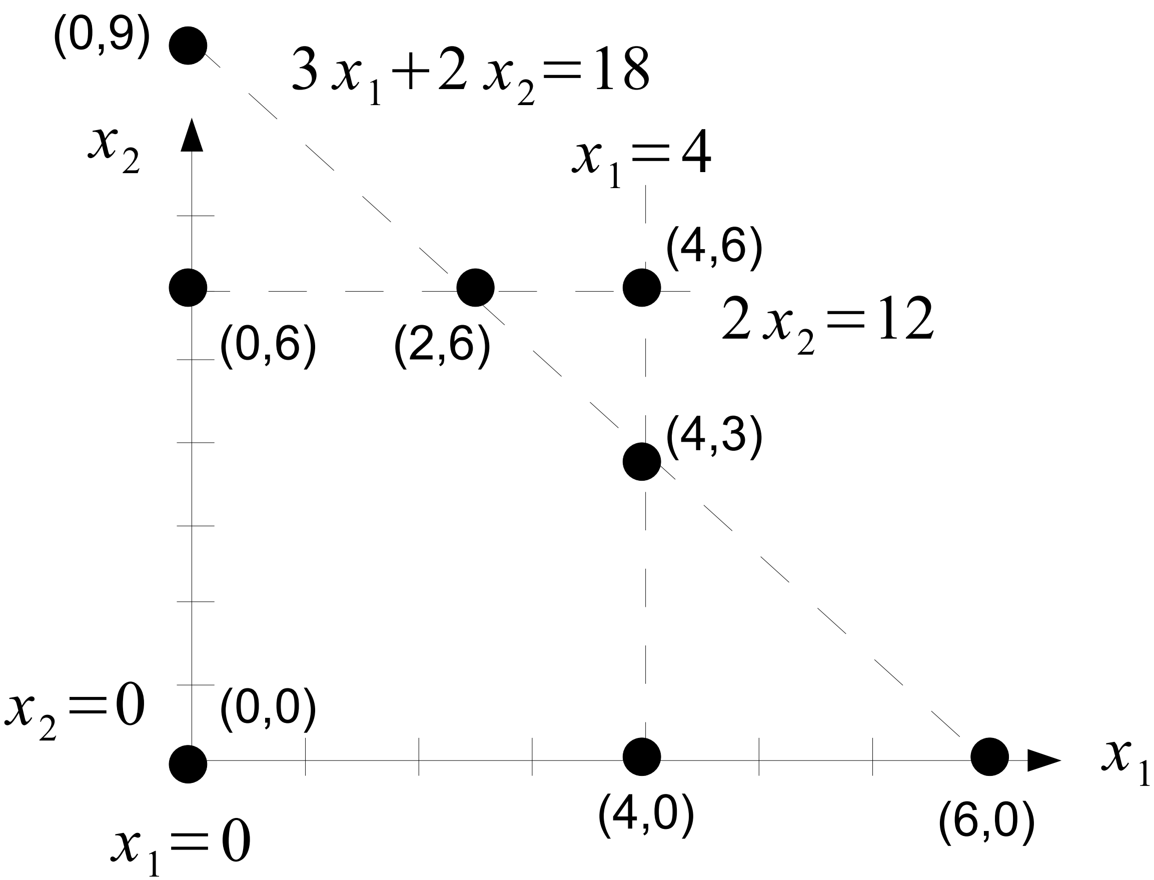
$$\underset{x_1,\, x_2,\, x_4,\, x_5}{\text{Min}} \quad \sin(x_1+x_2)+(8x_1-6x_2+9x_4+4x_5-6)^2$$

$$+1/3\left(x_4+x_5^2-\left[1/2+3/8\,x_1+1/4\,x_2-1/8\,x_4+3/4\,x_5\right]\right)$$

Nouveau problème

Programmation Linéaire

La méthode du simplex



Minimise	$Z=3x_1+5x_2$
Avec	$x_1 \leq 4$
	$2x_2 \leq 12$
	$2x_1+3x_2 \leq 18$
et	$x_1, x_2 \geq 0$

Programmation Linéaire

La méthode du simplex - Définitions

Corner-Point Solution (CP): un point pas forcément réalisable d'intersection entre 2 contraintes d'égalités

Corner-Point Feasible Solution (CPF): un point d'intersection entre 2 contraintes d'égalités

Solution augmenté: solution à laquelle on a ajouté des variables

Solution de base: une solution CP augmentée

Solution de base réalisable (Basic Feasible): une solution CPF augmentée

Variable de dérive (slack variable): une variable ajoutée pour transformer une contrainte d'inégalité en contrainte d'égalité

Test d'optimalité:
La solution courante est optimale si chaque coeff de la ligne 0 est non-négatif
Exemple:
$-3 \quad -5 \quad 0 \quad 0 \quad 0$ il est toujours possible de minimiser la fonction objectif en augmentant x_2
$0 \quad 0 \quad 0 \quad 3 \quad -2$ il n'est pas possible d'augmenter la fonction objectif en jouant sur une variable de base.

Programmation Linéaire

La méthode du simplex

Minimise	$Z=3x_1+5x_2$		Minimise $Z-3x_1+5x_2=0$
Avec	$x_1\leq 4$	Forme Standard	Avec $x_1+x_3=4$
	$2x_2\leq 12$	$\longrightarrow$	$2x_2+x_4=12$
	$2x_1+3x_2\leq 18$		$2x_1+3x_2+x_5=18$
et	$x_1, x_2\geq 0$		et $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\geq 0$

Forme algébrique	Forme tabulée							
	Variable de base	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	
$Z-3x_1-5x_2=0$	Z	1	-3	-5	0	0	0	0
$x_1+x_3=4$	x_3	0	1	0	1	0	0	4
$2x_2+x_4=12$	x_4	0	0	2	0	1	0	12
$3x_1+2x_2+x_5=18$	x_5	0	3	2	0	0	1	18

Programmation Linéaire

La méthode du simplex - Itération 1

Forme tabulée

Variable de base	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	R	
Z	1	-3	-5	0	0	0	0	0
x_3	0	1	0	1	0	0	4	4
x_4	0	0	2	0	1	0	12	$12/2=6$
x_5	0	3	2	0	0	1	18	$18/2=9$

Sélection de la variable de base de départ: c'est la variable qui possède le plus grand coeff en valeur absolue.
La colonne correspondante sera la « colonne pivot ».

1. Sélectionner chaque coeff non négatif de la colonne pivot
2. Diviser les coeff de la colonne R par chacun de ces coeff
3. Sélectionner la ligne qui a le plus petit résultat
4. La variable de base de cette ligne est appelée variable de base d'arrivée. Elle remplace la variable de base de départ

Programmation Linéaire

La méthode du simplex - Itération 1 - Fin

Forme tabulée (Tableau de départ)

Variable de base	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	R
Z	1	-3	-5	0	0	0	0
x_3	0	1	0	1	0	0	4
x_4	0	0	2	0	1	0	12
x_5	0	3	2	0	0	1	18

Tableau de départ

Forme tabulée (Nouveau tableau)

Variable de base	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	R
Z	1	-3	0	0	$5/2$	0	30
x_3	0	1	0	1	0	0	4
x_2	0	0	1	0	$1/2$	0	6
x_5	0	3	0	0	-1	1	6

Nouveau tableau

On effectue des opérations matricielles sur les lignes de façon à reproduire le motif de la colonne x_4 dans la colonne x_2.

Programmation Linéaire

La méthode du simplex - Itération 2

Forme tabulée

Variable de base	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	R	
Z	1	-3	0	0	$5/2$	0	30	0
x_3	0	1	0	1	0	0	4	$4/1=4$
x_2	0	0	1	0	$1/2$	0	6	6
x_5	0	3	0	0	-1	1	6	$6/3=2$

Sélection de la variable de base de départ: c'est la variable qui possède le plus grand coeff en valeur absolue.
La colonne correspondante sera la « colonne pivot ».

1. Sélectionner chaque coeff non négatif de la colonne pivot
2. Diviser les coeff de la colonne R par chacun de ces coeff
3. Sélectionner la ligne qui a le plus petit résultat
4. La variable de base de cette ligne est appelée variable de base d'arrivée. Elle remplace la variable de base de départ

Programmation Linéaire

La méthode du simplex - Itération 2 - Fin

Forme tabulée

Variable de base	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	R
Z	1	-3	0	0	$5/2$	0	30
x_3	0	1	0	1	0	0	4
x_2	0	0	1	0	$1/2$	0	6
x_1	0	3	0	0	-1	1	6

Tableau de départ

Forme tabulée

Variable de base	Z	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	R
Z	1	0	0	0	$3/2$	1	36
x_3	0	0	0	1	$1/3$	$-1/3$	2
x_2	0	0	1	0	$1/2$	0	6
x_5	0	1	0	0	$-1/3$	$1/3$	2

Nouveau tableau

On effectue des opérations matricielles sur les lignes de façon à reproduire le motif de la colonne x_5 dans la colonne x_1.

Solution optimal

$$(2, 6, 2, 0, 0)$$

Programmation Linéaire

Exemples de modélisation - Emploi du temps - 1/3

But: construction de l'emploi du temps hebdomadaire de 2 classes

- Les 2 classes ont les mêmes prof sauf pour math et gym.
- Tous les cours durent 2 heures et les élèves d'une même classe suivent les mêmes cours.
- Les créneaux sont les suivants: 8h-10h 10h15-12h15 14h-16h 16h15-18h15
- Sur une semaine il y a 15 créneaux.

Professeur	Matière	Nombre de cours de 2h donnés à la classe 1	Nombre de cours de 2h donnés à la classe 2
M. Cheese	Anglais	1	1
Mme Insuline	Biologie	3	3
M. Map	Histoire-Géo	2	2
M. Efdehicks	Math	0	4
Mme Dérivée	Math	4	0
Mme Electron	Physique	3	3
M. Béhachel	Philo	1	1
M. Muscle	Sport	1	0
Mme Biceps	Sport	0	1

Programmation Linéaire

Exemples de modélisation - Emploi du temps - 2/3

On note:

- **p** le nombre de professeurs;
- **c** le nombre de classes;
- **t** le nombre de créneaux horaires par jours;
- **d** le nombre de jours considérés;
- $\mathbf{NbC}_{ij}$ le nombre de cours que le professeur i doit donner à la classe j
- $\mathbf{x}_{ijk}$ une variable valant 1 si le professeur i donne un cours à la classe j pendant le créneaux horaire k.

Les indices varient de:

- **1** à **d** pour l'indice **i** (cet indice désigne un professeur);
- **1** à **c** pour l'indice **j** (cet indice désigne une classe);
- **1** à **dt** pour l'indice **k** (cet indice désigne un nombre de créneaux);

Programmation Linéaire

Exemples de modélisation - Emploi du temps - 3/3

$$(1)\quad min \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{c} \sum_{l=0}^{d-1} \left(x_{i,j,l.t+1} + x_{i,j,l.t+t} \right)$$

Minimiser la somme des cours placés en début et fin de journée (pour minimiser les trous) dans les créneaux 1 à 4 de chaque journée

$$(2)\quad \forall i=1,\dots,p,\ j=1,\dots,c \quad \sum_{k=1}^{d.t} x_{ijk} = NbC_{ij}$$

Un prof doit dispenser ses heures de cours

$$(3)\quad \forall\ j=1,\dots,c,\ k=1,\dots,d.t \quad \sum_{i=1}^{p} x_{ijk} \leq 1$$

Un prof donne un cours à une classe

$$(4)\quad \forall i=1,\dots,p,\ k=1,\dots,d.t \quad \sum_{j=1}^{p} x_{ijk} \leq 1$$

Un prof donne un cours à la fois

$$(5)\quad \forall i=1,\dots,p,\ j=1,\dots,c,\quad l=1,\dots,d \quad \sum_{k=(l-1).t+1}^{l.t} x_{ijk} \leq 1$$

Pas plusieurs fois la même matière le même jours

$$(6)\quad x_{8,1,15}=1$$

$$(7)\quad x_{9,2,15}=1$$

Les cours de gym donnés aux classes 1 et 2 par les profs 8 et 9 se déroulent créneau 15

$$(8)\quad \forall i=1,\dots,p,\quad j=1,\dots,c \quad x_{ij1}=0$$

Premier créneau réservé pour les DS

$$(9)\quad \forall k=1,\dots,2 \quad x_{42k}=0$$

Cours de math classe 2 interdit lundi matin

$$(10)\quad \forall\ j=1,\dots,2,\quad k=9,\dots,12 \quad x_{2jk}=0$$

Cours de bio classe 1 et 2 interdit mercredi

$$(11)\quad \forall i=1,\dots,p,\quad j=1,\dots,c,\quad k=1,\dots,d.t \quad x_{ijk} \in \{0,1\}$$

Les variables sont booléennes

MIP: **M**ixed **I**nteger **P**rogramming

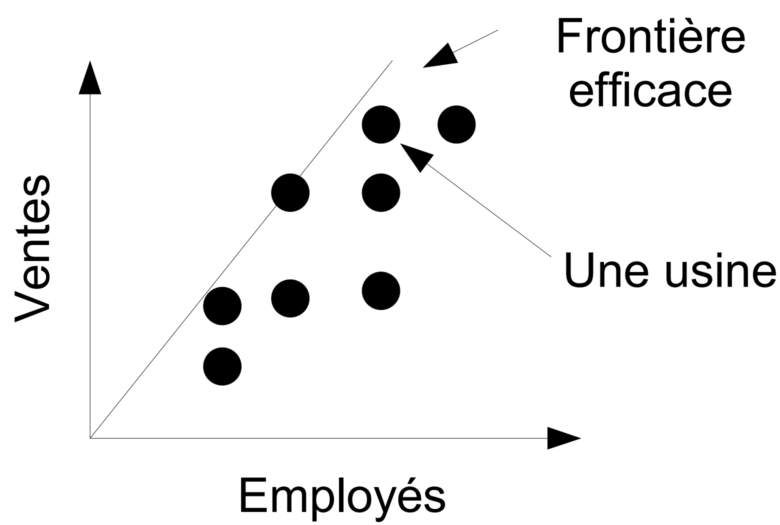
DEA

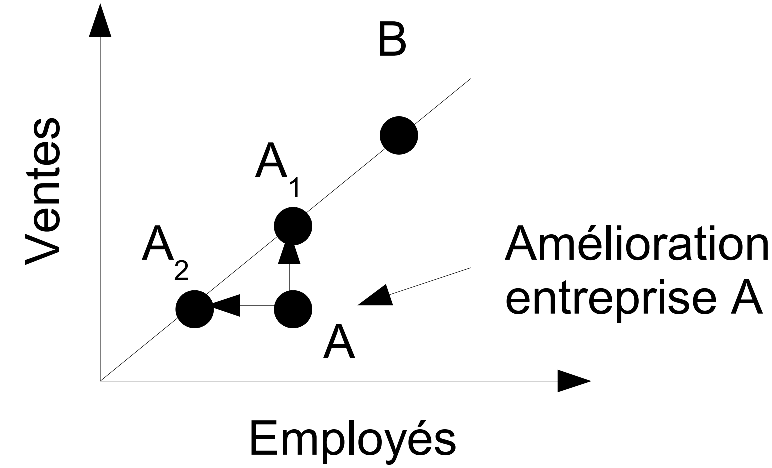
Data Envelopment Analysis - 1/2

Evaluation des performances

Coût unitaire
Profit unitaire
Satisfaction unitaire

$$\longrightarrow \frac{\text{Somme pondérée des sorties}}{\text{Somme pondérée des entrées}}$$





DEA

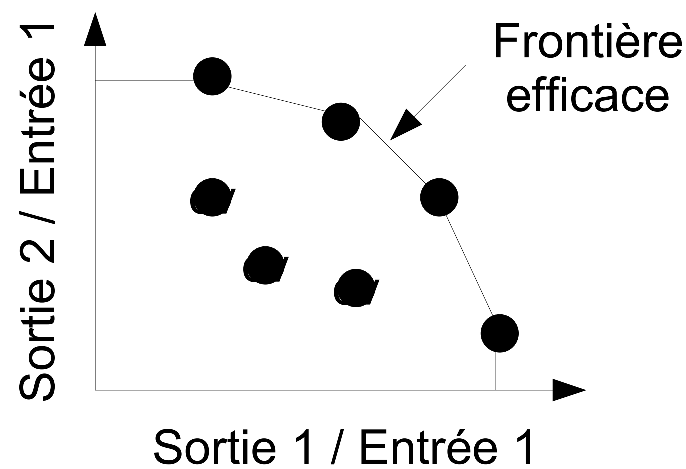
Data Envelopment Analysis - 2/2

Modèle CCR (Charnes Cooper Rhodes - 1978)

Modèle original

Maximiser $$\theta=\frac{u_1 y_{10}+\ldots+u_s y_{s0}}{v_1 x_{10}+\ldots+v_m x_{m0}}$$

Avec
$$\frac{u_1 y_{1j}+\ldots+u_s y_{sj}}{v_1 x_{1j}+\ldots+v_m x_{mj}}\leq 1 \quad j=1,\ldots,n$$
$$v_1,\ldots,v_m\geq 0$$
$$u_1,\ldots,u_s\geq 0$$



Modèle programmation linéaire

Maximiser $$\theta=\mu_1 y_{10}+\ldots+\mu_s y_{s0}$$

Avec
$$v_1 x_{10}+\ldots+v_m x_{m0}=1$$
$$\mu_1 y_{1j}+\ldots+\mu_s y_{sj}-v_1 x_{1j}+\ldots+v_m x_{mj}\leq 0 \quad j=1,\ldots,n$$
$$v_1,\ldots,v_m\geq 0$$
$$\mu_1,\ldots,\mu_s\geq 0$$